Universidad Simón Bolivar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas IV (MA2115)
Ene-Mar 2022
1^er Examen Parcial (50 %)

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. Determine la divergencia absoluta, condicional o divergencia de las siguientes series. (6 pts)

   a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{sen}^2(k)}{k\sqrt{k}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

2. Halle el desarrollo en serie de Maclaurin de la función e indique su intervalo de convergencia. (8 pts)

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$$

3. Determine el conjunto de convergencia y radio de convergencia de la serie de potencia (12 pts)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$$

4. Hallar la solución de la siguiente EDO. (12 pts)

$$3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$$

5. Hallar la solución de la siguiente EDO. (12 pts)

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$$

1. Determine la divergencia absoluta, condicional o divergencia de las siguientes series. (6 pts)

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$

SOLUCIÓN. Aplicamos el criterio de la integral.

Sea $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, necesitamos garantizar que dicha función sea positiva y decreciente en el intervalo $[2\ ,\infty)$, donde ambas se cumplen, pues;

- $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2} > 0$, ya que $\ln(x) \wedge x^2 > 0\ \forall\ x \in [2, \infty)$ ✓
- $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln(x)}{x^3} < 0$, ya que $1-2\ln(x) < 0\ \forall\ x \in [2, \infty) \wedge x^3 > 0\ \forall\ x \in [2, \infty)$ ✓

Entonces, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$ converge si, y solo si, $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx$ converge.

Cambio de Variable: $u = \ln(x) \Rightarrow x = e^u \mid du = \dfrac{1}{x}\ dx$

$$x = 2 \Rightarrow u = \ln(2) \mid x \to \infty \Rightarrow u \to \infty$$

$$\int_{\ln(2)}^{\infty} u\ e^{-u}\ du = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln(2)}^{b} u\ e^{-u}\ du = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{u+1}{e^u} \right]_{\ln(2)}^{b}$$

$$\lim_{b\to\infty} \left(\frac{\ln(2) - 1}{2} - \frac{b+1}{e^b} \right) = \frac{\ln(2) - 1}{2}$$

Luego, como el límite existe y es finito, la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\ dx$ converge y, por consecuente, la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$ también.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\ \frac{\operatorname{sen}^2(k)}{k\ \sqrt{k}}$

SOLUCIÓN Sea $a_k = (-1)^k\ \dfrac{\operatorname{sen}^2(k)}{k\ \sqrt{k}}$, determinamos la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(k)}{k\ \sqrt{k}}$ utilizando el criterio de comparación término a término.

Partimos de

$$\operatorname{sen}(k) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \operatorname{sen}^2(k) \leq 1$$

$$\underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2(k)}{k\ \sqrt{k}}}_{|a_k|} \leq \underbrace{\frac{1}{k\ \sqrt{k}}}_{b_k}$$

Evaluamos la convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$, la cual converge por ser una p-serie con $p = \dfrac{3}{2} > 1$

Luego, por el criterio de comparación término a término, como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ también.

Finalmente, como $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ converge, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{sen}^2(k)}{k\,\sqrt{k}}$ coverge absolutamente.

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$

SOLUCIÓN Aplicamos el criterio de la razón.

Tomamos

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^k\ \cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}\ \cancel{k!}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^k}\right|$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^k}{k^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right| = e$$

Luego, como $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = e > 1$, la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$ diverge.

2. Halle el desarrollo en serie de Maclaurin de la función e indique su intervalo de convergencia. (8 pts)
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$$

SOLUCIÓN. Reescribimos f aplicando fracciones parciales:

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x + (-A-3B)}{(x-3)(x-1)}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A - 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}, \quad \text{Luego } f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)\right]$$

Ahora, aplicamos la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \text{ con intervalo de convergencia } I_1 : |x| \Rightarrow I_1 : -1 < x < 1$$

De manera análoga,

$$\frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^k, \text{ con intervalo de convergencia } I_2 : \left|\frac{x}{3}\right| \Rightarrow I_2 : -3 < x < 3$$

Así, $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^k - \frac{x^k}{3^{k+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right)x^k,$

con intervalo de convergencia $I : I_1 \cap I_2 \Rightarrow I : -1 < x < 1$. $\blacksquare$

3. Determine el conjunto de convergencia y radio de convergencia de la serie de potencia (12 pts)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{(2x-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$$

SOLUCIÓN. Aplicamos el criterio de la razón: $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{\cancel{n}+1}(2x-1)^{\cancel{n}+1}}{(n+1)^{1/3}} \cdot \frac{n^{1/3}}{\cancel{(-1)^n}\cancel{(2x-1)^n}} \right| = |2x-1| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{1/3}$$

Luego la serie converge absolutamente en el intervalo

$$|2x-1| < 1 \Rightarrow 2\left|x - \frac{1}{2}\right| < 1 \Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}, \quad \text{donde el radio es } R = \frac{1}{2}. \text{ Así,}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < x < 1$$

Queremos estudiar los extremos para saber si se incluyen en el intervalo de convergencia

- Para $x = 0$ obtenemos la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (-1)^k}{k^{1/3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/3}} \text{ una } p\text{-serie divergente } \left(p = \frac{1}{3} < 1 \right)$$
  Luego, $x = 0$ no se incluye en el intervalo de convergencia.
- Para $x = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/3}}$. Aplicando el criterio de Leibniz

  1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{1/3}} = 0$ ✓
  2. $n+1 > n \Rightarrow (n+1)^{1/3} > n^{1/3} \Rightarrow \dfrac{1}{(n+1)^{1/3}} < \dfrac{1}{n^{1/3}}$, para $n \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$ ✓

  Así, por el criterio de Leibniz la serie converge. Por lo tanto $x = 1$ se incluye en el intervalo.

Finalmente, la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \, \frac{(2x-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$ converge para $x \in (0, 1]$ y su radio es $R = \dfrac{1}{2}$.

▪

4. Hallar la solución de la siguiente EDO. (12 pts)

$$3x + y - 2 + y'(x-1) = 0$$

SOLUCIÓN. Dejamos del lado derecho de la igualdad la función y y sus derivadas.

$y'(x-1) + y = 2 - 3x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}(x-1) + y = 2 - 3x$

Hacemos el cambio de variable $y = uv$, con $u \neq 0, v \neq 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$, asi:

$\dfrac{dy}{dx}(x-1) + y = 2 - 3x \Rightarrow \left(v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}\right)(x-1) + (uv) = 2 - 3x$

$\Rightarrow v\dfrac{du}{dx}(x-1) + u\dfrac{dv}{dx}(x-1) + uv = 2 - 3x$, sacando factor común u tenemos:

$$u\left(\frac{dv}{dx}(x-1) + v\right) + v\frac{du}{dx}(x-1) = 2 - 3x \qquad \textbf{(1)}$$

Resolvemos la EDO: $\left(\dfrac{dv}{dx}(x-1) + v\right) = 0$

$\dfrac{dv}{dx}(x-1) + v = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{v} + \dfrac{dx}{x-1} = 0 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dv}{v} + \int \frac{dx}{x-1} = \int 0 \Rightarrow \ln|v| + \ln|x-1| = C_1$

$\Rightarrow \ln|v(x-1)| = C_1 \Rightarrow e^{\ln|v(x-1)|} = e^{C_1}$, si $e^{C_1} = C_2 \Rightarrow v(x-1) = C_2 \Rightarrow v = \dfrac{C_2}{x-1}$

$v = \dfrac{C_2}{x-1} \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{C_2}{(x-1)^2}$, de este modo la EDO: $u\left(\dfrac{dv}{dx}(x-1) + v\right) = 0$

Luego sustituimos los valores en **(1)** y nos queda:

$0 + \dfrac{C_2}{\cancel{(x-1)}} \cdot \dfrac{du}{dx}\cancel{(x-1)} = 2 - 3x \Rightarrow C_2 du = (2-3x)dx \Rightarrow \displaystyle\int C_2 du = \int (2-3x)dx$

$\Rightarrow C_2 u = 2x - \dfrac{3}{2}x^2 + C_3 \Rightarrow u = \dfrac{1}{C_2} \cdot \left(2x - \dfrac{3}{2}x^2 + C_3\right)$

Ahora sustituimos los valores de u y v en $y = uv$, asi:

$y = \dfrac{1}{\cancel{C_2}} \cdot \left(2x - \dfrac{3}{2}x^2 + C_3\right) \cdot \dfrac{\cancel{C_2}}{x-1}$

De este modo, la solucion de la EDO pedida es: $y = \dfrac{C_3}{(x-1)} + \dfrac{2x}{(x-1)} - \dfrac{3x^2}{2(x-1)}$ ▪

5. Hallar la solución de la siguiente EDO. (12 pts)

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$$

SOLUCIÓN. Aplicamos el cambio de variable: $y' = p \Rightarrow y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

Entonces tenemos: $p\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$

Aplicamos el cambio de variable: $p^2 = z \Rightarrow 2p\dfrac{dp}{dy} = \dfrac{dz}{dy}$

$p\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y} \Rightarrow 2p\dfrac{dp}{dy} + 2p^2 = 4e^{-y} \Rightarrow \dfrac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y}$

Aplicamos el cambio de variable: $z = uv \Rightarrow \dfrac{dz}{dy} = v\dfrac{du}{dy} + u\dfrac{dv}{dy}$

Así: $v\dfrac{du}{dy} + u\dfrac{dv}{dy} + 2uv = 4e^{-y}$, sacando factor común u tenemos:

$$u\left(\frac{dv}{dy} + 2v\right) + v\frac{du}{dy} = 4e^{-y} \qquad \textbf{(1)}$$

Resolvemos la EDO: $\left(\dfrac{dv}{dy} + 2v\right) = 0$

$\dfrac{dv}{dy} + 2v = 0 \Rightarrow \dfrac{dv}{v} + 2dy = 0 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dv}{v} + \int 2dy = \int 0 \Rightarrow \ln|v| + 2y = C_1$

$\Rightarrow \ln|v| = C_1 - 2ye^{\ln|v|} = e^{C_1 - 2y} \Rightarrow v = e^{C_1} \cdot e^{-2y}$, si $e^{C_1} = C_2$

$\Rightarrow v = C_2 \cdot e^{-2y} \Rightarrow \dfrac{dv}{dy} = -2C_2 \cdot e^{-2y}$

De este modo la EDO: $u\left(\dfrac{dv}{dy} + 2v\right) = 0$

Luego sustituimos los valores en **(1)** y nos queda:

$0 + C_2 \cdot e^{-2y} \cdot \dfrac{du}{dy} = 4e^{-y} \Rightarrow C_2 du = 4e^y dy \Rightarrow \displaystyle\int C_2 du = \int 4e^y dy \Rightarrow C_2 u = 4e^y + C_3$

$u = \dfrac{1}{C_2} \cdot (4e^y + C_3)$

Ahora sustituimos los valores de u y v en $z = uv$, así:

$z = \dfrac{1}{\cancel{C_2}} \cdot (4e^y + C_3) \cdot \cancel{C_2} \cdot e^{-2y} \Rightarrow z = 4e^{-y} + C_3 e^{-2y} \Rightarrow z = \dfrac{4e^y + C_3}{e^{2y}}$

Devolvemos el cambio de varible $p^2 = z$

$p^2 = \dfrac{4e^y + C_3}{e^{2y}} \Rightarrow p = \sqrt{\dfrac{4e^y + C_3}{e^{2y}}} \Rightarrow p = \dfrac{\sqrt{4e^y + C_3}}{e^y}$

Devolvemos el cambio de varible $p = y'$

$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{4e^y + C_3}}{e^y} \Rightarrow dx = \dfrac{e^y}{\sqrt{4e^y + C_3}} dy \Rightarrow \displaystyle\int dx = \int \frac{e^y}{\sqrt{4e^y + C_3}} dy$

$\Rightarrow x + C_4 = \dfrac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_3} \Rightarrow 2(x + C_4) = \sqrt{4e^y + C_3} \Rightarrow 4(x + C_4)^2 = 4e^y + C_3$

$\Rightarrow 4e^y = 4(x+C_4)^2 - C_3 \Rightarrow e^y = \dfrac{4(x+C_4)^2 - C_3}{4}$

De este modo, la solucion de la EDO pedida es: $y = \ln\left|\dfrac{4(x+C_4)^2 - C_3}{4}\right|$ ▪

Este examen fue digitalizado por **Alvaro Quintana**, **Jesús Gutiérrez** y **Daniel Medina**

gecousb.com.ve

Cualquier error, notificar a **gecousb@gmail.com**